Dünya'nın Kütle Hesabı

Çılga Misli ve Oktay Yılmaz

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fizik Bölümü

Bu çalışma güncel olmamakla birlikte temel fizik yasalarının önemli ve ilk astronomik sonuçlarından olan "Dünya'nın Kütle Ölçümü"nü ele almaktadır. 18. Yüzyıl fizik bilgisi göz önüne alındığında Dünya'nın yuvarlaklığından bile şüphe duyulurken yapılan çalışmalar o dönem için çığır açıcı nitelikte önemlidir.

1. Giriş

O yıllarda G evrensel çekim sabitinin değeri bilinmemektedir. Eğer G sabitinin değeri bilinseydi Dünya'nın kütlesi Newton'un Çekim Yasası'ndan hesaplanabilirdi. Bu nedenle, Dünya'nın kütle (ya da yoğunluk) hesabı birçok bilim adamı için yorucu ve zevk aldıkları çalışmalar arasında yer almış, ayrıca bu başarılı çalışmanın sonucunda isimlerini bilim tarihine altın harflerle yazdırmışlardır.

Birçok bilim adamı Dünya'nın kütlesini 1790'lı yıllardan itibaren farklı yöntemler ile hesaplamıştır. Dünya'nın ortalama yoğunluğunun, hangi bilim adamları tarafından ve hangi tarihlerde hesaplandığı aşağıdaki tabloda kısaca özetlenmiştir [1].

Bilim Adamları	Tarih	Yoğunluk $(\mathrm{g/cm^3})$	Hata %
Cavendish	1798	5.448	1.2
Baily	1843	5.675	2.9
Reich	1852	5.583	1.2
Airy	1856	6.566	19.0
Cornu and Boille	1873	5.550	0.6
Jolly	1881	5.692	3.2
Wilsing	1889	5.579	1.2

Tablo 1. Dünya'nın yoğunluk ölçümünün tarihsel özeti

Dünya'nın kütle hesabıyla ilgili ilk çalışmalar İngiliz kimyacı ve fizikçi Henry Cavendish (1731-1810) tarafından yapılmıştır [2]. O'nun bu çalışmasında G çekim sabitinden açıkça söz edilmez fakat Dünya'nın yoğunluğunu ya da kütlesini ölçtüğü için dolaylı olarak G sabitini hesaplayan ilk bilim adamlarından biri olarak bilinir. G sabiti ilk defa 1873'lü yıllarda kullanılmaya başlanmıştır. Cavendish'in meşhur deney düzeneği, Newton'un kütle çekim ve rotasyonel hareket yasaları kullanılarak Dünya'nın kütle formülü

$$M_{\oplus} = \frac{gMR_{\oplus}^2 T^2}{2\pi^2 L\theta r^2} \tag{1}$$

olarak elde edilebilir [3]. Burada g yer yüzeyi civarındaki yerçekim ivmesi, $R_{\oplus}$ Dünya'nın yarıçapı, M büyük kurşun kürenin kütlesi, T periyot, θ burulma açısı, L küçük kurşun küreler arasındaki mesafe ve r ise büyük ve küçük kurşun küreler arasındaki mesafedir. Sonuçta

Dünya'nın kütlesi $5.92\ 10^{24}$ kg ve yoğunluğu da $5.48\ \mathrm{g/cm^3}$ olarak bulunmuştur [2]. Günümüzde ise Dünya'nın ortalama yoğunluğu $5.515\ \mathrm{g/cm^3}$ olarak bilinmektedir.

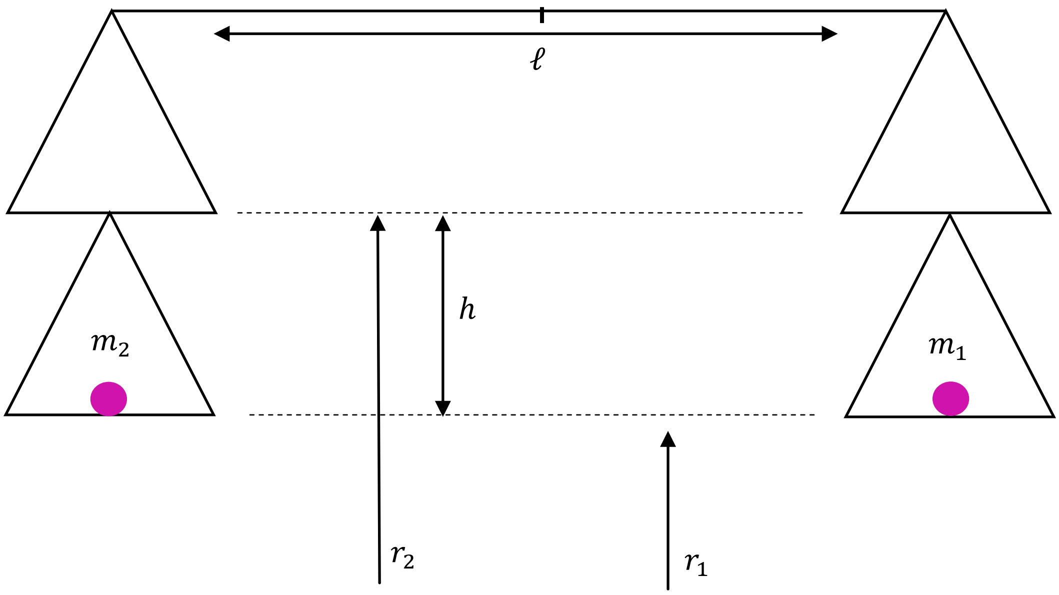
Tablo 1.'de diğer bilim adamları da farklı yöntemler ile Dünya'nın kütle hesabını yapmışlardır [1]. Bu çalışmada ise Philipp Johann Gustav von Jolly'nin yöntemi ile Dünya'nın kütle hesabı yapılacaktır [4].

2. Dört Kefeli Terazi Deneyi

Philipp Johann Gustav von Jolly (1809-1884): Alman fizikçi ve matematikçidir. Münih Üniversitesi'nde matematik ve fizik profesörlüğü yapmıştır. Kuantum fiziğinin kurucularından biri olan Max Planck'ın hocasıdır. Teknolojiye ayrı bir ilgisi vardır. Çok önemli çalışmaların ve ödüllerin sahibi olmakla birlikte 1881 yılında Dünya'nın kütlesini terazi yöntemi ile hesaplayan ilk bilim adamlarından biridir [4].

Philipp von Jolly'nin bu önemli çalışması aşağıdaki deneylerle gerçekleşmektedir:

Deney I.



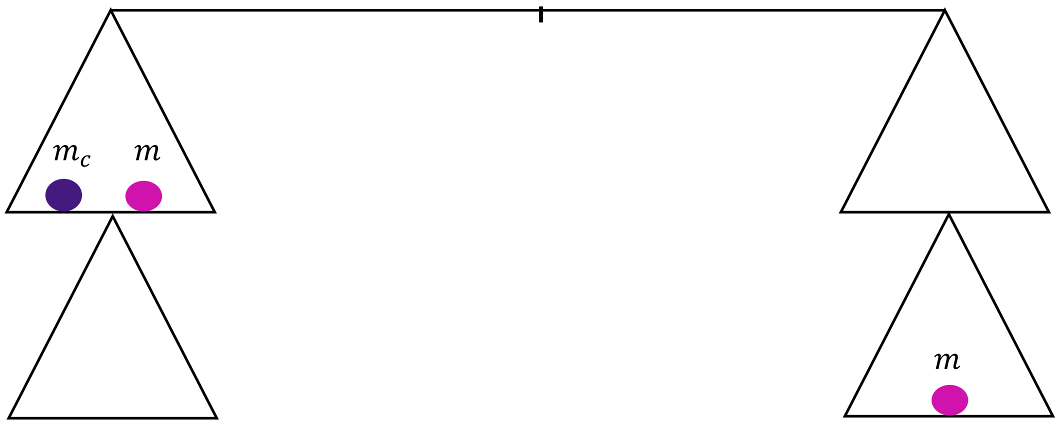
Şekil 1. Denge durumunda olan dört kefeli terazi

m_1 ve m_2 kütleleri Şekil 1.'deki terazinin alt kefelerine yerleştirilmektedir. Burada, r_1 Dünya'nın merkezinden terazinin alt kefesine, $r_2 = r_1 + h$ ise üst kefesine olan uzaklığı gösterir. Kefeleri taşıyan çubuğun uzunluğu $\ell = 0.6$ m ve kefeler arasındaki yükseklik farkı $h = 21.005$ m$\sim$21 m'dir. Terazi bu durumda dengededir ve bu dengeyi temsil eden ifade,

$$\frac{Gm_2M_\oplus}{r_1^2} = \frac{Gm_1M_\oplus}{r_1^2} \qquad (2)$$

Newton'un çekim yasası ile verilmektedir. Buna göre, (2) eşitliğinden $m_1 = m_2 = m$ olduğu görülür.

Deney II.



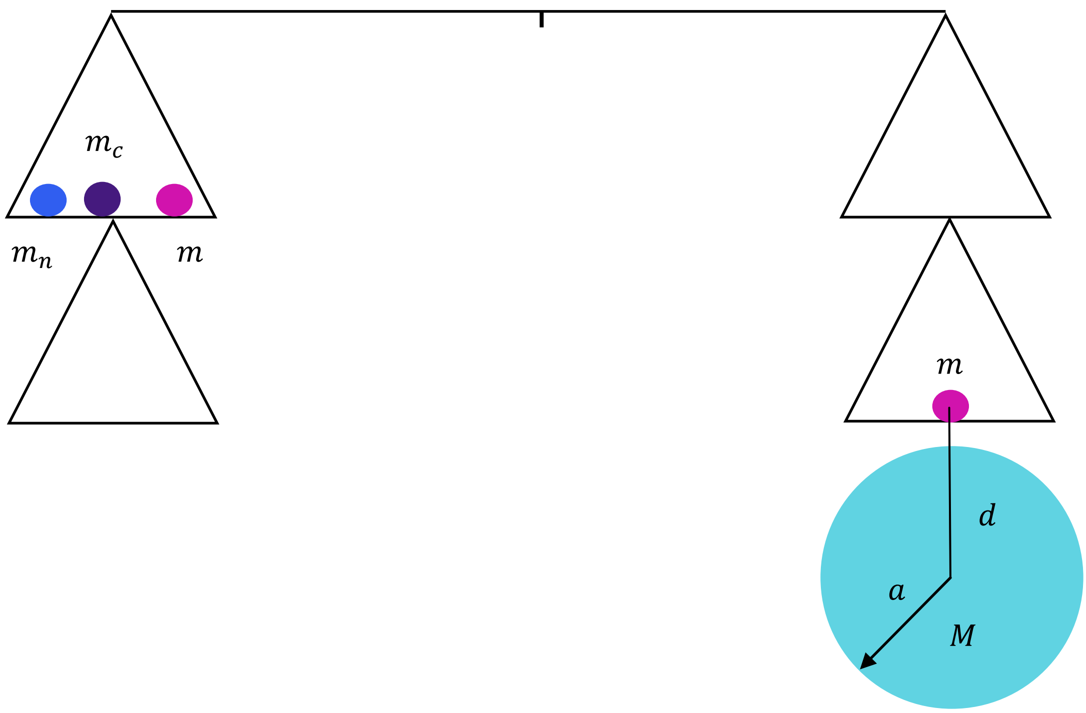
Şekil 2. m_c kadar kütlenin eklenmesiyle dengenin yeniden kurulması

Burada $m_2 = m$ kütlesi sol alt kefeden bir üst kefeye kaldırılmıştır. Dolayısı ile bu durumda terazinin dengesi bozulacaktır. Dengenin tekrar kurulabilmesi için m_c kadar kütlenin, sol üst kefeye eklenmesi gerekmektedir. Terazideki bu dengeyi ifade eden denklem yine benzer şekilde;

$$\frac{Gm_cM_\oplus}{r_2^2} + \frac{GmM_\oplus}{r_2^2} = \frac{GmM_\oplus}{r_1^2} \tag{3}$$

olacaktır.

Deney III.



Şekil 3. Kefenin altındaki M ve dengenin sağlanması için eklenen m_n kütlesi

III. Deneyde, sağ alt kefenin hemen altına, içi kurşun ile doldurulmuş a yarıçaplı küresel büyük bir M kütlesi yerleştirilmektedir. Bu durumda denge yeniden bozulacaktır. Ancak, sistemin tekrar dengeye gelmesi için sol üst kefeye m_n kadar kütle eklenmesi gerekir. Bu denge durumu yine Newton'un çekim yasasına göre;

$$\frac{Gm_n M_\oplus}{r_2^2} + \frac{Gm_c M_\oplus}{r_2^2} + \frac{GmM_\oplus}{r_2^2} + \frac{GmM}{h^2} = \frac{GmM_\oplus}{r_1^2} + \frac{GmM}{d^2} \qquad (4)$$

olarak ifade edilmektedir. Burada, $\ell/h \ll 1$, $m_c/m \ll 1$ ve $m_n/m \ll 1$ yaklaşımları yapılarak elde edilmiştir. Burada d, m ve M kütleleri arasındaki mesafedir. Böylece (3) denkleminin her iki tarafı -1 ile çarpılarak ve (4) denklemiyle taraf tarafa toplandığında,

$$\frac{Gm_n M_\oplus}{r_2^2} + \frac{GmM}{h^2} = \frac{GmM}{d^2}$$

veya

$$\frac{Gm_n M_\oplus}{r_2^2} = \frac{GmM}{d^2}\left(1 - \frac{d^2}{h^2}\right) \qquad (5)$$

bulunabilir. Burada, $1 - d^2/h^2$ katsayısı düzeltme çarpanıdır ve eğer $d/h \ll 1$ yaklaşımı yapılabilir ise

$$\frac{Gm_n M_\oplus}{r_2^2} \sim \frac{GmM}{d^2} \qquad (6)$$

elde edilir. Böylece (6) ifadesinden, Dünya'nın kütle hesabı için

$$M_\oplus \sim \frac{mMr_2^2}{m_n d^2} \qquad (7)$$

ifadesi bulunabilir. Ayrıca,

$$r_2 = r_1 + h = r_1\left(1 + \frac{h}{r_1}\right) \qquad (8)$$

$h/r_1 \ll 1$ olduğundan $r_1 \sim r_2 \sim R_\oplus = 6.37\ 10^6$ m alınabilir. Sonuçta Dünya'nın kütlesi,

$$M_\oplus \sim \frac{mMR_\oplus^2}{m_n d^2} \qquad (9)$$

ve yoğunluğu

$$\rho_\oplus \sim \frac{ma^3 \rho_M}{m_n R_\oplus d^2} \qquad (10)$$

ifadeleri kolaylıkla elde edilebilir. Burada, ρ_M büyük M kütlesinin yoğunluğu ve a yarıçapıdır.

Ayrıca, $g = GM_{\oplus}/r^2$ tanımından,

$$g_2 = \frac{GM_{\oplus}}{r_2^2} = \frac{GM_{\oplus}}{r_1^2\left(1+\frac{h}{r_1}\right)^2} = g_1\left(1-\frac{2h}{r_1}+\cdots\right)$$

ve buradan ivmedeki değişim,

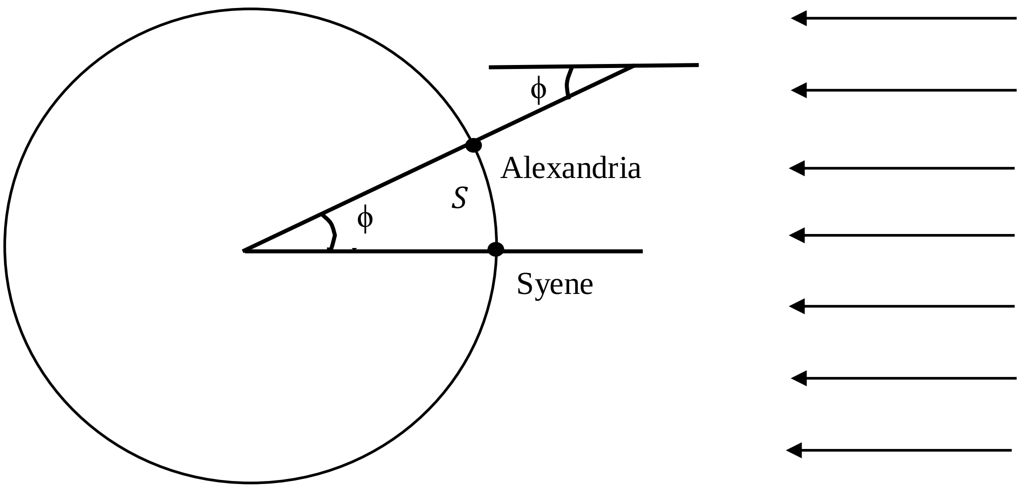
$$\frac{g_2-g_1}{g_1} \sim -\frac{2h}{r_1} \qquad (11)$$

olarak hesaplanabilir. $h/r_1 \ll 1$ ve $r_1 \sim R_{\oplus}$ yaklaşımında $g_1 \sim g_2 \sim g$ alınabilir.

Burada hesabın büyük bir oranda, Dünya'nın yarıçapına bağlı olduğu görülmektedir. Dünyanın çevresinin veya yarıçapının ölçülmesi ile ilgili ilk çalışmalar M.Ö 240 yıllarında Eratosthenes tarafından çok önceden yapılmıştır. Bu arada Eratosthenes'in bu yönteminden kısaca bahsetmek yerinde olur [5].

3. Eratosthenes Yöntemi ile Dünya'nın Yarıçap Hesabı

Güneş'in Dünya'dan çok uzakta olduğu düşünüldüğünde Güneş ışınlarının Dünya'ya paralel geldiği varsayılabilir. Buna göre Syene bölgesinde, yere dikilen bir direğin gölgesi oluşmazken aynı anda Alexandria bölgesinde yere dikilen bir direğin gölgesi oluşmaktadır. Oluşan bu gölgenin uzunluğu ve direğin boyu bilindiğinden Şekil 4.'den açı hesabı yapılabilir. Hesaplanan açının bu değeri $\phi = 7.2°$ olduğu bilindiği varsayılarak,



Şekil 4. Paralel ışınlar ve şehirler arasındaki ϕ açı ve S yay uzunluğu

Şekil 4.'den görüldüğü gibi şehirler arasındaki mesafe S yayı kadardır. Bu yayın uzunluğu 800 km kadar ölçülmüş olduğu bilgisi göz önüne alınarak ve

$$\phi = \frac{N}{2\pi}\frac{S}{R} = \frac{360°}{2\pi}\frac{S}{R} = 7.2° \tag{12}$$

ile verilen açının tanımından,

$$\frac{S}{2\pi R} = \frac{7.2°}{360°} = \frac{1}{50} \tag{13}$$

amaca uygun bir oran bulunur. Yay uzunluğu/çevre uzunluğu=1/50'dir. Burada çevre uzunluğu $2\pi R$ = 50×(yay uzunluğu)=50×800 km=40000 km bulunur. Buradan da Dünya'nın yarıçapı

$$R = \frac{2}{\pi}\ 10^7\ m \tag{14}$$

olarak hesaplanır.

4. Sonuç

Gustav von Jolly (9) veya (10) denkleminden Dünya'nın kütlesini veya yoğunluğunu deneylerdeki bilinen değerleri kullanarak hesaplamıştır [4]. Burada, $m_c \sim \frac{2mh}{R_\oplus} \sim 33.0\ 10^{-6}$ kg, $m_n = 0.589\ 10^{-6}$ kg, $m = 5.00945$ kg~ 5 kg, m ile M kütleleri arasındaki mesafe $d = 0.5686$ m~ 0.6 m, içi kurşun dolu kürenin kütlesi $M = 5775.2$ kg, yoğunluğu $\rho_M = 11197\ \mathrm{kg/m^3}$ ve yarıçapı $a = 0.4975$ m ve ayrıca $R_\oplus = 6365722$ m$\sim 6.37\ 10^6$ m olmak üzere (9) veya (10) numaralı ifadelerde yerlerine konulup hesaplandığında Dünyanın kütlesi,

$$M_\oplus \sim 6.150\ 10^{24}\ \mathrm{kg} \tag{15}$$

ve yoğunluğu

$$\rho_\oplus \sim \frac{M_\oplus}{\frac{4}{3}\pi R_\oplus^3} \sim 5692\ \mathrm{kg/m^3} \tag{16}$$

olarak bulunabilir. Günümüzde hesaplanan Dünya'nın kütlesi $M_\oplus = 5.97\ 10^{24}$ kg ve yoğunluğu da $5.515\ \mathrm{g/cm^3}$'dür. Dünya'nın yoğunluğunun günümüzdeki değeri ile kıyaslayabilmek için hata hesabı yapıldığında;

$$\frac{|5.692 - 5.515|}{5.515} = 3.2\ \% \tag{17}$$

bulunur. Diğer bilim adamların bu çalışmadaki hata hesapları Tablo 1.'de görülmektedir.

Ayrıca, bu deneyden Dünya'nın kütlesi bilindiğine göre,

$$GmM_\oplus / R_\oplus^2 = mg \tag{18}$$

ifadesinden de evrensel çekim sabitinin değeri,

$$G = gR_\oplus^2 / M_\oplus \sim 6.52\ 10^{-11}\ \mathrm{N.m^2/kg^2} \tag{19}$$

hesaplanabilir (günümüzde en son verilere göre, $G = 6.67\ 10^{-11}\ \mathrm{N.m^2/kg^2}$).

Görüldüğü gibi, Gustav von Jolly mükemmel bir deney tasarlamış ve ölçüm yapmıştır. Dünya'nın kütlesini (veya yoğunluğunu) ve ayrıca G evrensel çekim sabitini hesaplamıştır.

Kaynaklar

[1] Ducheyne, S., Testing universal gravitation in the laboratory, or the significance of resarch on the mean density of the earth and big G, 1798-1898: changing pursuits and long-term methodological-experimental continuity, Arch. Hist. Exact Sci., 65, 181-227 (2011).

[2] Cavendish, H., Experient to Determine the Density of the Earth, Phil. Trans. R. Soc. Lond., vol 88, 469-526 (1798).

[3] Halliday, D. and Resnick, R., Fundamentals of Physics, Third Edition Extended, John Wiley & Sons, Inc. (1988).

[4] Jolly, Philipp J.G. von, Die Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation, Annalen der Physik 250, 331-355 (1881).

[5] Goldstein, B. R. Eratosthenes on the "Measurement" of the Earth", Historia Matematica, Vol. 11, 411-416 (1984).